LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE
PROF: HANNACHI SALAH
« 3emeTECHNIQUE 1/2 »

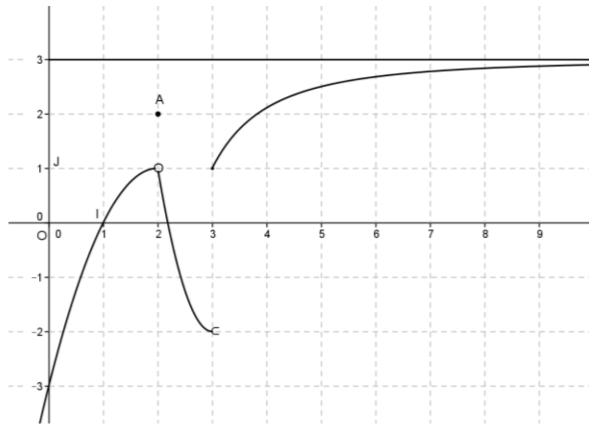
2015/2016

SERIE D'EXERCICES N1

Limite d'une fonction

EXERCICE N1 :

Le graphique ci-contre représente la courbe (C) d'une fonction f définie sur IR. (Tenir compte que le point A(2,2) ∈(C)). La droite D : y=3 est une asymptote à (C) au voisinage de +∞.



1) a/ Déterminer : $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$.

Que peut-on conclure ?

b/ A-t-on $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$? Justifier.

2) Déterminer : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{f(x)-3}$

et $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{|f(x)|}$

EXERCICE N2 :

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \frac{4x+4}{\sqrt{2x^2-1}-1} & \text{si } x < -1 \\ f(x) = 2x + a & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ (où a est un réel)

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$ =-2

2) En déduire la valeur de a pour laquelle f admet une limite en (-1).

EXERCICE N3 :

1) Soit la fonction f définie sur IR\{2} par : $f(x)=\frac{x^2+\sqrt{3x^4+x^2+1}}{x-2}$

Montrer que pour tout x <0 on a : $f(x)=\frac{x\left(1+\sqrt{3+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}\right)}{1-\frac{2}{x}}$. En déduire $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

2) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x\sqrt{x+1}}$

EXERCICE N4 :

Soit la fonction f définie sur IR\{1, −1} par : $f(x) = \frac{4x^2+12x-16}{5\,|1-x^2|}$ et (C) sa courbe représentative selon un repère orthogonal.

1) Etudier la limite de f en 1. Que peut en déduire ?

2) Montrer que la courbe (C) admet trois asymptotes dont on donnera leurs équations.

EXERCICE N5 :

Soit la fonction f définie sur IR* \ {1} par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-\sqrt{x^2-x}}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{2x^2-2}{x|x-1|^3} & \text{si } x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\end{cases}$

(C) est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O , $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

1) Montrer que l'axe (O , $\vec{\imath}$) est une asymptote à (C) au voisinage de +∞

2) Montrer que chacune des droites $D_1 : x = 0$ et $D_2 : x = 1$ est une asymptote verticale à (C) à droite et à gauche.

3) a) Montrer que pour tout $x < 0$ on a :

$$f(x) = x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$$

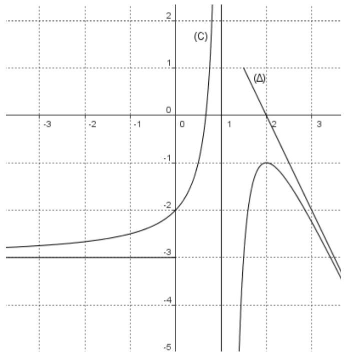
b) Déterminer alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

4) a) Montrer que la droite Δ: $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$

b) Etudier la position de (C) par rapport à la droite Δ pour tout $x \in]-\infty, 0[$.

EXERCICE N6 :

Le graphique ci-contre représente la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{IR}\backslash\{1\}$. La droite (Δ) : $y = -2x+4$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$. Les droites d'équations $x = 1$ et $y = -3$ sont des asymptotes à (C).



1) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f(x)+3}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + 2x - 4]$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + 2x - 4]$

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) Soit α l'unique solution dans D_f de l'équation $f(x) = -2x+4$

En tenant compte de la position de (C) par rapport à (Δ), dresser le tableau de signe de l'expression : $g(x) = f(x) + 2x - 4$.

EXERCICE N7 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{IR}^*$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{x^2-x}{|x^2-x|+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$

2) Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes horizontales dont on donnera leurs équations.

EXERCICE N8 :

Calculer chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^4+3x^2-1}}{x-2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-3x+1}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [\sqrt{4x^2+x-1} - 2x - 1]$; $\lim\limits_{x \to -\infty} [\sqrt{2x^4+x^3-1} - \sqrt{x^2+1}]$; $\lim\limits_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^3+1}]$

EXERCICE N9 :

Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{x^2+x}{x-2}$ (C) étant sa courbe dans un repère orthonormé.

1) Montrer que (C) admet une asymptote verticale dont on donnera une équation

2) a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax+b+\frac{c}{x-2}$ $\forall x \in \mathbb{IR}\backslash\{2\}$.

b) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $(+\infty)$ et au voisinage de $(-\infty)$.

c) Etudier la position relative de la courbe (C) et son asymptote (Δ).